Ein Kreis mit unendlich vielen Mittelpunkten

Die erstaunliche Welt der p-adischen Geometrie

von Aeneas Rooch

**Die Welt, die Annette Werner untersucht, erscheint uns fremd, fast schon absurd: Verschiedene Zahlen haben hier die gleiche Größe, und Kreise besitzen unendlich viele Mittelpunkte.
Die Mathematikprofessorin forscht auf dem Gebiet der sogenannten p-adischen Geometrie – einem Bereich der modernen Algebra, der in den letzten Jahrzehnten einen stürmischen Fortschritt erlebt hat.**

Wenn wir jemandem mitteilen wollen, wie weit ein Ort von einem anderen entfernt liegt, können wir das auf verschiedene Arten tun: Wir können zum Beispiel die Luftlinie in Kilometern nennen, in Yard oder in Lichtjahren. Wir können aber auch angeben, wie lange der Weg zu Fuß dauert, mit dem Auto oder mit öffentlichen Verkehrsmitteln. Je nachdem, welche Messweise und welche Einheit wir wählen, erhalten wir unterschiedliche Werte für den fraglichen Abstand. Es kann sogar passieren, dass wir diese Werte nicht einmal intuitiv ineinander umrechnen können, weil sich die Messsysteme grundlegend unterscheiden. So können zwei Orte bloß wenige Kilometer voneinander entfernt liegen, trotzdem dauert die Reise mit Bus und Bahn aber eine Ewigkeit – in einem solchen Fall ist die Entfernung in Kilometern klein, während sie gemessen mit dem ÖPNV groß ist. Jede einzelne Messart jedoch – ob nun Luftlinie, Straßenstrecke, Fußweg oder Reisedauer per ÖPNV – funktioniert und ist legitim.

Eine ungewohnte, aber ebenso plausible und konsistente Art, Abstände zu messen, steht am Anfang von Annette Werners Forschung. »Ich nehme sozusagen bloß ein anderes Lineal«, sagt sie lapidar, dabei ändert ihre Art zu messen den Charakter der ganzen Welt, die sie vermisst. Das mag dramatisch klingen, es ist aber ganz normal: Eine andere Methode, Abstände zu beziffern, liefert halt auch andere Konzepte von »nah« (kleiner Abstand) und »fern« (großer Abstand), siehe die unterschiedlichen Entfernungen bei den Messmethoden »Luftlinie« und »ÖPNV« – und was man jeweils unter »nah« und »fern« versteht, macht den Charakter eines Raumes wesentlich aus. Das Lineal, das Annette Werner in der Mathematik benutzt, um die Größe von Zahlen zu messen – und das die Zahlenwelt für Außenstehende so ungewohnt und fremd erscheinen lässt –, basiert auf der Primfaktorzerlegung.

Jede natürliche Zahl kann eindeutig in Potenzen von Primzahlen zerlegt werden, zum Beispiel:

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$
$$33 = 3 \cdot 11$$
$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$
$$75 = 3 \cdot 5^2$$
$$76 = 2^2 \cdot 19$$

Diese Primfaktorzerlegung kann nun auch zur Größenmessung herangezogen werden. Anstatt den gewöhnlichen Betrag der Zahl zu nehmen (das ist sozusagen das Standardlineal, mit dem Zahlen üblicherweise vermessen werden), schaut man auf ihre Zerlegung und ignoriert alle bis auf einen bestimmten Faktor, der p genannt wird, etwa $p = 3$ oder $p = 907$ oder einen anderen. Der Kehrwert der Potenz dieses Faktors p in der Primfaktorzerlegung einer Zahl ist der sogenannte p-adische Betrag der Zahl. Man schreibt also einfach p so oft in den Nenner, wie diese Primzahl als Faktor in der Prim-

Bildd: amtitus/istockphoto

faktorzerlegung auftritt. Es ist ein simples Konzept. Berechnen wir schnell den p-adischen Betrag der obigen Zahlen für den Fall, dass wir p = 5 festhalten:

|30| = 1/5
(weil 5 als Primfaktor genau einmal vorkommt)

|33| = 1
(weil 5 als Primfaktor nullmal vorkommt, und $5^0 = 1$)

|36| = 1
(ebenso)

|75| = $1/5^2$ = 1/25
(weil 5 als Primfaktor genau zweimal vorkommt)

|76| = 1 (s.o.)

Halten wir die Primzahl p = 3 fest, sind die p-adischen Beträge der obigen Zahlen:

|30| = 1/3
|33| = 1/3
|36| = $1/3^2$ = 1/9
|75| = 1/3
|76| = 1

Diese Art, die Größe einer Zahl zu messen, wirkt skurril: Halten wir beispielsweise p = 3 fest, so sind die Zahlen 30, 33 und 75 gleich groß, und 36 ist kleiner als 33. Das alles widerspricht unserem Gefühl für Zahlen und Größen. Davon abgesehen aber sei am p-adischen Betrag überhaupt nichts seltsam, im Gegenteil, erläutert Annette Werner: »Man kann zeigen, dass der p-adische Betrag im Prinzip genau wie unser Alltagsabstand funktioniert.« Das bedeutet, es ist eine technisch widerspruchsfreie Methode, die zusätzlich bestimmte Voraussetzungen erfüllt, die für die Messung einer Länge sinnvoll sind. Im Kern also funktioniert der p-adische Betrag genauso wie andere Verfahren zur Längenmessung. »Die meisten Leute sind mit dem gewöhnlichen Lineal zufrieden«, schmunzelt Werner, »aber wir Mathematiker eben nicht. Das zeigt sehr schön, wie wir denken. Wir fragen uns, was allgemein hinter dem Prinzip ›Abstand‹ und ›Lineal‹ steckt und was die Mechanismen sind, die alle Lineale und Abstände gemeinsam haben.«

Das Konzept des p-adischen Betrags, also die Größe einer Zahl durch einen ihrer Primfaktoren p anzugeben, funktioniert nicht nur für natürliche Zahlen, sondern lässt sich auch auf Brüche ausweiten. Dabei spielt es übrigens keine Rolle, welches p man in Gedanken festhält, weil jede Wahl eines konkreten p zu einer Welt führt, die nach den gleichen Gesetzen funktioniert. »Es ergibt überhaupt keinen Sinn, sich zum Beispiel nur p = 17 anzuschauen«, erläutert Annette Werner, »alle p sind für uns gleich.« Deshalb spricht man auch von »p-adischen« Zahlen und Beträgen, mit einem anonymen p statt einer konkreten Zahl: Die Struktur der Zahlen und der Beträge bleibt die gleiche, ganz egal, ob nun p = 11 oder p = 599 oder eine andere Primzahl gewählt wird. Mathematikerinnen und Mathematiker schauen nicht auf konkrete Situationen, sondern auf alle Fälle zugleich – indem sie ein flexibles p als Platzhalter stehen lassen.

Es gibt in der p-adischen Welt noch mehr als eine Entsprechung unserer altbekannten Brüche: Genau so, wie die Lücken zwischen unseren klassischen Brüchen von irrationalen Zahlen wie π, e oder $\sqrt{2}$ gefüllt werden, lassen sich auch die Lücken zwischen den p-adischen Brüchen stopfen, so dass eine dichte Zahlengerade entsteht, ganz ähnlich den reellen Zahlen – nur dass es hier halt etwas andere Zahlen sind und Abstände hier anders beziffert werden.

Von diesen neuen Zahlen und Abständen aus gelangt man nun zum Fachgebiet von Annette Werner, der p-adischen Geometrie, indem man diese neuen Zahlen als Grundlage für geometrische Konzepte verwendet. In einem ersten Schritt kann man etwa Gleichungen analysieren und die Figuren untersuchen, die die Lösungen der Gleichungen liefern, ganz genau so, wie man es bei den herkömmlichen reellen Zahlen auch tut. Die reelle Gleichung x = y wird etwa von allen Punkten (x, y) im zweidimensionalen Koordinatensystem gelöst, bei denen x und y identisch sind; diese Lösungspunkte bilden eine Gerade. Die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ hingegen liefert einen Kreis. Zu untersuchen, welche

Foto Werner: Jürgen Lecher

Gleichungen welche Figuren beschreiben und welche abstrakten Eigenschaften der Gleichungen sich in welchen Eigenschaften der entsprechenden Figuren widerspiegeln, ist eine der klassischen Herausforderungen in der Geometrie.

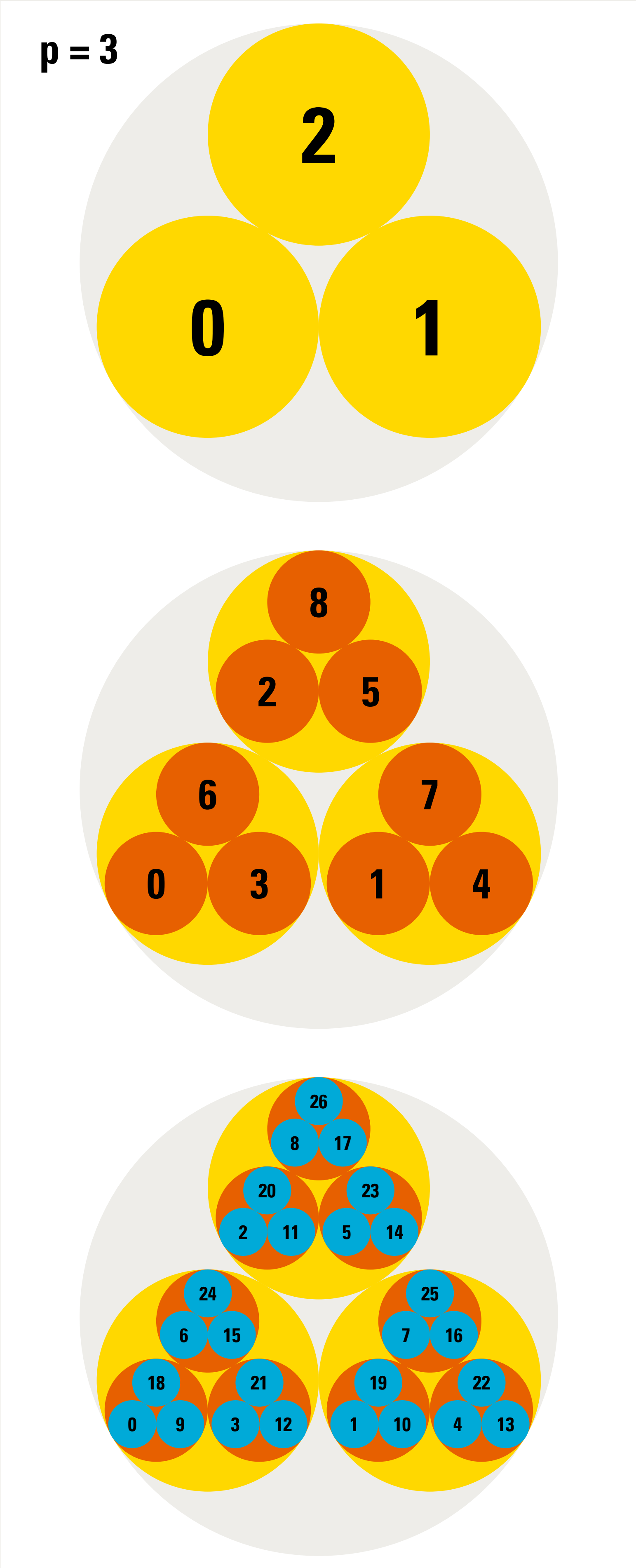
Mit p-adischen Zahlen entsteht eine andere Art der Geometrie als die, die wir von unserem Anschauungsraum gewohnt sind, weil sich Größen eben anders verhalten, und das hat kuriose Konsequenzen: In der p-adischen Geometrie besitzt zum Beispiel ein jeder Kreis unendlich viele Mittelpunkte. »Bildlich kann man sich das nicht vorstellen«, beruhigt Annette Werner, »aber das muss man auch nicht, man kann es ja mit mathematischen Methoden genau untersuchen.« Unendlich viele Mittelpunkte können wir uns nicht ansatzweise vorstellen, und es klingt grotesk, letztlich ist es aber das deutliche und unanfechtbare Ergebnis einer simplen Berechnung: Der Mittelpunkt eines Kreises ist – in unserer wie auch in anderen Geometrien – als der Punkt definiert, der von allen Punkten auf der Kreislinie den gleichen Abstand besitzt, und mit der p-adischen Art, Abstände zu messen, ist es eben so, dass alle Punkte im Inneren des Kreises von allen Punkten auf der Kreislinie den gleichen Abstand haben. Damit sind, jenseits aller Vorstellbarkeit, schlicht alle Punkte im Kreis, egal wo sie liegen, Mittelpunkt.

Eine andere einfache Rechnung, die ebenso Studierende als Hausaufgabe erledigen können, ergibt, dass in der p-adischen Welt jedes Dreieck mindestens zwei gleich lange Seiten besitzt, oder anders gesagt: Dreiecke mit drei verschieden langen Seiten kann es hier nicht geben. »Das klingt jetzt alles komisch«, räumt Annette Werner ein, »aber das liegt nur daran, dass die Wörter ›Dreieck‹ und ›Kreis‹ in unseren Köpfen die Bilder aus der Anschauungsmetrik hervor-

ZUR PERSON

Annette Werner, Jahrgang 1966, studierte Germanistik, Musikwissenschaften und Publizistik an der Westfälischen Wilhelms-Universität in Münster, bevor sie ihr Interesse für Mathematik entdeckte. Nach ihrer Promotion arbeitete sie am MPI für Mathematik in Bonn und war Professorin an der Universität Siegen und der Universität Stuttgart, bevor sie 2007 eine W3-Professur an der Goethe-Universität antrat. Sie erhielt ein Heisenberg-Stipendium der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) und war Gastprofessorin am Mathematical Sciences Research Institute in Berkeley, Kalifornien. Ihre Arbeitsgebiete sind arithmetische algebraische Geometrie, nichtarchimedische analytische Geometrie und tropische Geometrie. Annette Werner ist Mutter zweier erwachsener Kinder und Principal Investigator im SFB/Transregio 326 »Geometry and Arithmetic of Uniformized Structures«.

werner@math.uni-frankfurt.de



Man kann sich p-adischen Zahlen durch ganze Zahlen nähern, die dieselben Restklassen haben. Teilt man natürliche Zahlen zum Beispiel durch 3, bleibt als Rest entweder 0, 1 oder 2 übrig:

0 modulo 3 = 0
1 modulo 3 = 1
2 modulo 3 = 2
3 modulo 3 = 0
4 modulo 3 = 1

Wie man »modulo 3« rechnet, wird zum Beispiel erklärt auf https://tinyurl.com/ModuloRechnen. Alle Zahlen, die nach Division durch 3 denselben Rest (gelbe Kreise im oberen grauen Kreis) ergeben, werden als Restklasse bezeichnet.

Der graue Kreis darunter enthält die Reste, wenn man natürliche Zahlen durch zweite Potenz von 3, also $3^2 = 9$ teilt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 8 in orangen Kreisen. Drei orange Kreise liegen in einem gelben Kreis, wenn die entsprechenden Zahlen dieselbe Restklasse modulo 3 haben, zum Beispiel:

2 modulo 3 = 2
5 modulo 3 = 2
8 modulo 3 = 2.

Daher finden sich oben (wo vorher nur die 2 war) jetzt im gelben Kreis die kleineren, orangen Kreise mit 2,5 und 8, die alle den Rest 2 modulo 3 haben – wenn auch verschiedene Reste modulo 9.

Das Spiel geht im dritten grauen Kreis mit der dritten Primzahlpotenz 3^3 weiter: Wenn wir Reste modulo $3^3 = 27$ suchen, dann wird jeder orange Kreis noch mal in drei Kreise unterteilt. In dem Kreis zu 8 ganz oben wird dann einbeschrieben 8, 17 und 26: Diese drei Zahlen haben alle den Rest 8 modulo 9, aber verschiedene Reste modulo 27. Daher sind sie im gleichen orangen Kreis, aber in verschiedenen blauen.

Grafik: Nina Ludwig nach Heiko Knospe, TH Köln

rufen, und die sind konkrete Spezialfälle, die die p-adische Situation nicht zeigen.«

Dreiecke mit mindestens zwei gleich langen Seiten, Kreise mit unendlich vielen Mittelpunkten, große Zahlen mit kleinem Betrag – das alles mag auf uns mit unserer Alltagserfahrung absurd wirken, die p-adischen Zahlen bilden jedoch eine ordnungsgemäße, plausible, reguläre Welt, innerhalb derer alles streng nach einheitlichen, logischen Gesetzen zugeht. Das, was diese Welt für uns so kurios macht, ist lediglich, dass sie von Zahlen bevölkert wird, die wir aus unserem Alltag so nicht kennen, und dass die Spielregeln, nach denen sie sich richten, auch andere sind als die, die wir von unseren Alltagszahlen gewohnt sind.

Geometrie ist mehr, als eine formale Gleichung und ihre Lösungsmenge zu untersuchen. Man kann zum Beispiel auch mehrere Gleichungen gemeinsam analysieren. Man kann auch eine Variable in einer Summe mit unendlich vielen Summanden auftreten lassen und sich fragen, wann und in welchen Zusammenhängen diese Summe, die erst einmal nichts weiter ist als ein formal hingeschriebenes Objekt, eine sinnvolle Bedeutung erhält, welche Eigenschaften sie besitzt, was sie mit den unendlichen Summen gemeinsam hat, die wir aus der Welt der reellen Zahlen kennen, und vieles mehr.

»Ich schäle gern den Kern der Dinge heraus«, erzählt Annette Werner, »ich nehme zum Beispiel ein Konzept und schaue, ob es in einem anderen Zusammenhang auch so funktioniert, wie man es kennt, oder eben doch irgendwie anders. Und warum mache ich das? Weil wir Mathematiker eben so ticken!« Sie erklärt: »Wir fragen uns, in welcher Sprache wir ein Objekt verstehen können und was es wohl in anderen Sprachen bedeutet.« Aktuell ist es der Professorin der Goethe-Universität gelungen, Teile der sogenannten Simpson-Korrespondenz in die p-adische Welt zu übertragen. Dabei geht es um mathematische Strukturen namens Higgs-Bündel und wie sie mit der Topologie von Mannigfaltigkeiten zusammenspielen.

Eine Mannigfaltigkeit ist eine abstrakte Verallgemeinerung einer Fläche, man kann an so etwas wie eine Brezel oder einen Bagel denken. Topologie ist die Lehre von räumlichen Objekten und ihren zerreißungsfreien Verformungen. Man kann sich etwa vorstellen, die Brezel wäre aus Gummi und man zöge an den Schlingen, ohne sie zu zerreißen; die Brezel ändert dann zwar ihre Form, die Anzahl ihrer Löcher aber bleibt gleich. Solche Erhaltungsgrößen wie die Löcheranzahl, die nicht von der konkreten Gestalt eines Objektes abhängen, sondern etwas über die grundlegende Struktur des Objektes verraten, sind in der mathematischen Forschung von besonderem Interesse. Higgs-Bündel schließlich lassen Bezüge zum Higgs-Boson erkennen, dem berühmten Elementarteilchen, für dessen theoretische Untersuchung im Jahr 2013 der Nobelpreis für Physik verliehen wurde (nachdem der Experimentalphysikforschung am Teilchenbeschleuniger CERN in Genf 2012 der experimentelle Nachweis gelungen war, dass dieses Teilchen tatsächlich existiert).

Annette Werner hat dieses Konzept – das Zusammenspiel der Higgs-Bündel mit Mannigfaltigkeiten – in die p-adische Geometrie überführt. »Ich schaue mir sozusagen die p-adischen Cousins dieser Higgs-Bündel an und untersuche, welche Informationen sie über die Geometrie und Topologie enthalten, der sie hier begegnen.« Für ihre Arbeit hat Werner unter anderem die Technik der perfektoiden Räume genutzt, die der Bonner Mathematiker Peter Scholze entwickelt hat. Scholze erhielt für seine Arbeit 2018 die Fields-Medaille, eine der höchsten Auszeichnungen des Fachs, die auch »Nobelpreis der Mathematik« genannt wird. »Sich in diese Methoden einzuarbeiten, ist schon mühsam, wenn man nicht mehr jung ist«, erinnert sich Annette Werner, »aber ich kann mit diesen starken Methoden Dinge klären und beweisen, die mir vorher verschlossen waren.«

Trotz der inhaltlichen Verwandtschaft zum berühmten Higgs-Boson werde die Arbeit wohl niemanden am CERN interessieren, glaubt Annette Werner. Es ist schließlich Grundlagenforschung. »Mir ist es egal, ob das, was ich herausgefunden habe, bei einem konkreten Problem angewandt werden kann, das ist nicht meine Motivation. Ich weiß aber, dass ich mit meiner Arbeit ein sicheres Fundament für unsere Wissenschaft lege, und das brauchen wir früher oder später, um zukünftige konkrete Probleme zu lösen.«

Als Principal Investigator forscht die Mathematikerin auch im Sonderforschungsbereich Transregio 326 mit (an dessen Akronym GAUS – für »Geometrie und Arithmetik uniformisierter Strukturen« – sich viele der Beteiligten vermutlich erst einmal gewöhnen mussten, weil der gleich klingende Mathematiker anders geschrieben wird). Der Verbund hat sich zum Ziel gesetzt, strukturelle Fragen in der Geometrie und Arithmetik zu beantworten und grundlegende Zusammenhänge zwischen Konzepten wie Modulräumen, automorphen Formen, Galois-Darstellungen oder kohomologischen Strukturen zu finden. GAUS wird an der Goethe-Universität koordiniert und von der Deutschen Forschungsgemeinschaft mit 9,2 Millionen Euro gefördert.

»Die Forschung in der Geometrie ist natürlich weit von dem entfernt, was man im Schulunterricht über Geometrie lernt und was man sich bildlich vorstellen kann«, sagt Annette Werner, »die p-adische Geometrie ist zum Beispiel ein hilfreiches Werkzeug für die moderne Zahlentheorie.« Das Wissen darüber, wie Zahlen funktionieren, welche Eigenschaften sie besitzen und wie man mit ihnen arbeiten kann, ist für die digital vernetzte Welt unverzichtbar geworden: Jeder Verschlüsselungsalgorithmus, von E-Mail bis Online-Banking, arbeitet mit Objekten und Methoden aus der Zahlentheorie. Im abstrakten Werkzeugkasten, mit dem Zahlen untersucht und behandelt werden, haben auch die p-adischen Zahlen und Beträge einen Platz gefunden: »Die p-adischen Beträge von Zahlen zu untersuchen, liefert uns ganz andere und oft überraschend nützliche Informationen über Strukturen in den Zahlen«, erklärt Annette Werner.

AUF DEN PUNKT GEBRACHT

- p-adische Zahlen sind eine andere Art, Abstände zu messen, und sie beruhen auf der Zerlegung einer Zahl in Primzahlen, also Zahlen, die nur durch sich selber oder 1 teilbar sind.
- Wie mit reellen Zahlen lassen sich auch mit p-adischen Zahlen geometrische Figuren berechnen, nur dass diese für uns nicht plastisch vorstellbar sind und scheinbar groteske Eigenschaften haben.
- p-adische Geometrie ist ein Werkzeug für die moderne Zahlentheorie, die wiederum Basis für Verschlüsselungsalgorithmen ist.

Der Autor

Aeneas Rooch, geboren 1983, hat Mathematik und Physik studiert und in Wahrscheinlichkeitstheorie promoviert. Er arbeitet als Wissenschaftsjournalist und unterstützt Forschende bei Vorträgen und Science Communication.

https://rooch.de

Foto Rooch: Ben Knabe